



4. Lösungen der Anwendungsaufgaben

4.1. Extremwertaufgaben

a)

$$x \hat{=} \text{Grundseite} \Rightarrow u$$

$$f(x) \hat{=} \text{Höhe} \Rightarrow f(u)$$

$$A_{\Delta} = \frac{g \cdot h}{2} \quad \Rightarrow \quad A_{\Delta} = \frac{u \cdot f(u)}{2}, \quad 0 \leq u \leq 4$$

Zielfunktion:

$$A_{\Delta}(u) = \frac{1}{16}u^4 - \frac{3}{8}u^3 + \frac{5}{2}u, \quad 0 \leq u \leq 4$$

Gesucht ist der absolute Hochpunkt.

$$A'_{\Delta}(u) = \frac{1}{4}u^3 - \frac{9}{8}u^2 + \frac{5}{2}$$

$$A''_{\Delta}(u) = \frac{3}{4}u^2 - \frac{9}{4}u$$

Notw. Bedingung für lokale Extremstelle: $A'_{\Delta}(u) = 0$

$$\frac{1}{4}u^3 - \frac{9}{8}u^2 + \frac{5}{2} = 0$$

$$\dots \Rightarrow x_1 = 2; \quad x_2 = 3,81; \quad x_3 = -\frac{5,25}{4}$$

Widerspruch! Länge kann nicht negativ sein!

Hinreichende Bedingung:

$$A''(2) = -1,5 < 0 \Rightarrow \text{HP}$$

$$A''(3,81) = 2,3 > 0 \Rightarrow \text{TP}$$

$$A(2) = 3; \quad A(0) = 0; \quad A(4) = 2 \quad (\text{Randpunkte werden untersucht})$$

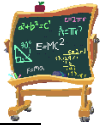
HP(2;3) absoluter Hochpunkt

Also ist $x=2$ die gesuchte Lösung:

Die Gerade $g: x = 2$ ermöglicht den größten Flächeninhalt: $A_{\max} = 3\text{FE}$

Fit für die Q-Phase ?

Mathematiktraining für die Schüler und Schülerinnen des Beruflichen Gymnasiums Gelnhausen



b)

Extremalbedingung: $A = x \cdot y$

Nebenbedingung: $2x + 2y = 20$, also $x + y = 10$

Zielfunktion: $A(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$, $0 < x < 10$

Ableitungsfkt.: $A'(x) = 10 - 2x$; $A''(x) = -2$

Gesucht ist der absolute Hochpunkt.

Notwend. Bedingung für lokale Extremstellen: $10 - 2x = 0 \Rightarrow x = 5$

Hinr. Bed. $A''(5) = -2 < 0 \Rightarrow$ lokaler *HP*

Verhalten an den Rändern: $\lim_{x \rightarrow 0} A(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 10} A(x) = 0$

HP(5;25) absoluter Hochpunkt

Ergebnis: Maximaler Flächeninhalt für $x = y = 5\text{cm}$ mit $A=25\text{cm}$.

c)

Extremalbedingung: $V = x^2 \cdot y$ maximieren

Nebenbed.: $8x + 4y = 36$, also $2x + y = 9$

Zielfunktion: $V(x) = x^2 \cdot (9 - 2x) = 9x^2 - 2x^3$, $0 < x < 4,5$

Gesucht ist der absolute Hochpunkt.

Extrema: Notw. Bed. $V'(x) = 18x - 6x^2 = 0$ für $x = 0$ und $x = 3$

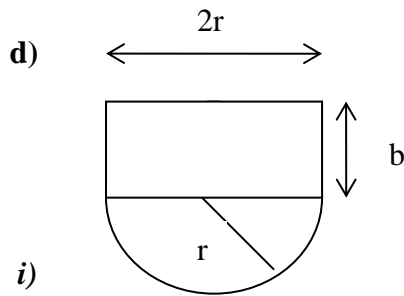
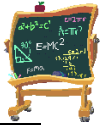
Hinr. Bed. $V''(0) = 18 \Rightarrow$ lokaler *TP*

$V''(3) = -18 \Rightarrow$ lokaler *HP*

$V(0) = 0$; $V(3) = 27$, $V(4,5) = 0$ (Randpunkte werden auch betrachtet)

HP(3;27) absoluter Hochpunkt.

Ergebnis: Die gesuchte Säule ist ein Würfel mit der Kantenlänge 3cm.



$$U=30\text{m}$$

$$\text{Extremalbed.: } A = \underset{A_{\square}}{2rb} + \underset{A_{\text{Halbkreis}}}{\frac{\pi}{2}r^2}$$

$$\text{Nebenbed.: } 30 = 2r + 2b + \pi r \Rightarrow b = 15 - r - \frac{\pi}{2}r$$

$$\begin{aligned}\text{Zielfunktion: } A(r) &= 2r \cdot \left(15 - r - \frac{\pi}{2}r\right) + \frac{\pi}{2}r^2 \\ &= 30r - 2r^2 - \pi r^2 + \frac{\pi}{2}r^2 \\ &= 30r - 2r^2 - \frac{\pi}{2}r^2, \quad 0 < r < 30 \quad (\text{Grenzen sehr grob})\end{aligned}$$

Gesucht ist der absolute Hochpunkt.

$$\text{Lokale Extrema: } A'(r) = 30 - 4r - \pi r = 0$$

$$30 = (\pi + 4) \cdot r \Rightarrow r = \frac{30}{\pi + 4}$$

$$A''(r) = -4 - \pi < 0 \Rightarrow \text{lokaler HP}$$

$$\text{Randpunkte: } A(0) = 0; \quad A\left(\frac{30}{\pi + 4}\right) \approx 63,01; \quad A(30) = -900 - 450\pi < 0$$

$$r = \frac{30}{\pi + 4} \quad \text{absolute Hochpunktstelle.}$$

$$\text{b ausrechnen durch einsetzen von r in } b = 15 - r - \frac{\pi}{2}r \Rightarrow b = \frac{30}{\pi + 4}.$$

$$\text{Ergebnis: Maximales Volumen wird erreicht für } r = \frac{30}{\pi + 4} \text{ und } b = \frac{30}{\pi + 4}.$$

Fit für die Q-Phase ?

Mathematiktraining für die Schüler und Schülerinnen des Beruflichen Gymnasiums Gelnhausen



ii) Allgemeiner Fall von i) mit U

$$\text{Extremalbed.: } A = 2rb + \frac{\pi}{2}r^2$$

A_{\square} $A_{\text{Halbkreis}}$

$$\text{Nebenbed.: } U = 2r + 2b + \pi r \Rightarrow b = \frac{U}{2} - r - \frac{\pi}{2}r$$

$$\begin{aligned}\text{Zielfunktion: } A(r) &= 2r \cdot \left(\frac{U}{2} - r - \frac{\pi}{2}r \right) + \frac{\pi}{2}r^2 \\ &= Ur - 2r^2 - \pi r^2 + \frac{\pi}{2}r^2, \\ &= Ur - 2r^2 - \frac{\pi}{2}r^2, \quad 0 < r < U \quad (\text{Grenzen sehr grob})\end{aligned}$$

Gesucht ist der absolute Hochpunkt.

$$\text{Extrema: } A'(r) = U - 4r - \pi r = 0$$

$$U = (\pi + 4) \cdot r \Rightarrow r = \frac{U}{\pi + 4}$$

$$A''(r) = -4 - \pi < 0 \Rightarrow \text{lokaler HP}$$

$$A(0) = 0;$$

$$A\left(\frac{U}{\pi + 4}\right) = U \frac{U}{\pi + 4} - 2\left(\frac{U}{\pi + 4}\right)^2 - \frac{\pi}{2}\left(\frac{U}{\pi + 4}\right)^2 = \frac{U^2}{2(\pi + 4)} > 0;$$

$$A(U) = U^2 - 2U^2 - \frac{\pi}{2}U^2 = -U^2 - \frac{\pi}{2}U^2 < 0$$

$$\text{HP}\left(\frac{U}{\pi + 4}; \frac{U^2}{2(\pi + 4)}\right) \text{ absoluter Hochpunkt.}$$

$$b \text{ ausrechnen durch einsetzen von } r \text{ in } b = \frac{U}{2} - r - \frac{\pi}{2}r \Rightarrow b = \frac{U}{\pi + 4}.$$

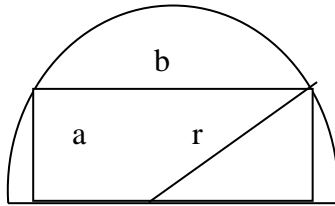
$$\text{Ergebnis: Maximales Volumen wird erreicht für } r = b = \frac{U}{\pi + 4}.$$

Fit für die Q-Phase ?

Mathematiktraining für die Schüler und Schülerinnen des Beruflichen Gymnasiums Gelnhausen



e)



Extremalbedingung : $A_{\square} = a \cdot b$

Nebenbedingung : r ist durch Satz des Pythagoras zu berechnen (siehe Lösungsskizze)

$$r^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad \text{bzw.} \quad b = 2 \cdot \sqrt{r^2 - a^2} = 2 \cdot \sqrt{100 - a^2}$$

Zielfunktion : $A(a) = a \cdot b = a \cdot 2 \cdot \sqrt{100 - a^2}$,

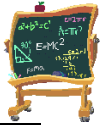
$$A'(a) = 2 \cdot \sqrt{100 - a^2} - \frac{2a^2}{\sqrt{100 - a^2}} = \frac{200 - 4a^2}{\sqrt{100 - a^2}} \quad (a > 0)$$

$$\text{Notw.Bed.: } A'(a) = 0 \quad \dots \Rightarrow a_1 = \sqrt{50} ; \underbrace{a_2 = -\sqrt{50}}_{\text{entfällt, da negativ}}$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{2} \cdot 10$$

Ergebnis: Für $a \approx 7,07\text{cm}$ und $b \approx 14,14\text{cm}$ ist Flächeninhalt des Rechtecks maximal und beträgt 100cm^2 .

Fit für die Q-Phase ?
**Mathematiktraining für die Schüler und Schülerinnen des
Beruflichen Gymnasiums Gelnhausen**



4.2. Bestimmung ganzrationaler Funktionen

a)

$$(1) \quad f(x) = ax^2 + bx + c \quad ; \quad f'(x) = 2ax + b$$

$$f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$$

$$f(2) = 3 \quad \Rightarrow \quad 4a + 2b = 3$$

$$\text{Steigung in } P \text{ gleich } 2: \quad f'(2) = 2 \quad \Rightarrow \quad 4a + b = 2$$

Gleichungssystem lösen \Rightarrow gesuchte Funktionsgleichung lautet: $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x$

$$(2) \quad f(x) = ax^2 + bx + c \quad ; \quad f'(x) = 2ax + b$$

$$f(1) = 2 \quad \Rightarrow \quad a + b + c = 2$$

$$f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$$

$$f'(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2a + b = 0$$

Gleichungssystem lösen $\Rightarrow a = -2; b = 4$

ges. Funktionsgl.: $f(x) = -2x^2 + 4x$

$$(3) \quad f(x) = ax^2 + bx + c \quad ; \quad f'(x) = 2ax + b$$

$$f(0,75) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1,5a + b = 0$$

$$f'(1) = 4 \quad \Rightarrow \quad 2a + b = 4$$

Gleichungssystem lösen: $a = 8; b = -12; c$ ist beliebig, da lediglich 2 Variablen bestimmbar sind

\Rightarrow ges. Fktgl.: $f(x) = 8x^2 - 12x + c$

b)

Fit für die Q-Phase ?

Mathematiktraining für die Schüler und Schülerinnen des Beruflichen Gymnasiums Gelnhausen



Es gilt für (1) und (2) jeweils :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f'''(x) = 6a$$

(1)

$$f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$$

$$f(2) = 4 \Rightarrow 8a + 4b + 2c = 4$$

$$f'(2) = -3 \Rightarrow 12a + 4b + c = -3$$

$$f''(2) = 0 \Rightarrow 12a + 2b = 0$$

$$\text{Gleichungssystem lösen : } a = \frac{5}{4}; b = -\frac{15}{2}; c = 12; d = 0$$

$$\Rightarrow \text{ges. Fktgl.: } f(x) = \frac{5}{4}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 12x$$

(2)

$$f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$$

$$f''(0) = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}a + c = 0$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow a + c = 2$$

$$\text{Gleichungssystem lösen : } a = -4; b = 0; c = 6; d = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = -4x^3 + 6x$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) < 0, \text{ also hat Graph an der Stelle HP}$$

c)

$$f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$$

$$f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 + c$$

$$f''(x) = 20ax^3 + 6bx$$

$$f(1) = -2 \Rightarrow a + b + c = -2$$

$$f(\sqrt{2}) = -\sqrt{8} \Rightarrow 4\sqrt{2}a + 2\sqrt{2}b + \sqrt{2}c = -\sqrt{8} \quad | : \sqrt{2} \\ \Rightarrow 4a + 2b + c = -2$$

$$f'(\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow 20a + 6b + c = 0$$

$$\text{Gleichungssystem lösen : } a = \frac{1}{2}; b = -\frac{3}{2}; c = -1$$

$$\text{ges. Funktionsgleichung : } f(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{3}{2}x^3 - x$$

Fit für die Q-Phase ?

Mathematiktraining für die Schüler und Schülerinnen des Beruflichen Gymnasiums Gelnhausen

